Μάθημα 21ο 11/05/18

Θεώρημα : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$

Τότε η f που αυτή ορίζει είναι ολόμορφη

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in D(a,R)$$

(η οποία έχει και αυτή ακτίνα σύγκλισης R)

Πρόταση

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$ [η e^z αναπτύσσεται στη δυναμοσειρά ...]

Πρόταση

$$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad z \in D(0,1)$$

Απόδειξη: Η δυναμοσειρά που γράψαμε έχει ακτίνα σύγκλισης 1

(από κριτήριο: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ αν $c_n \neq 0$, στην περίπτωση μας έχουμε: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$)

και η συνάρτηση που ορίζει αυτή η δυναμοσειρά στο δίσκο σύγκλισής της είναι ολόμορφη με παράγωγο

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{z+1}, \quad z \in D(0,1)$$

$\longrightarrow$ γεωμ σειρά.

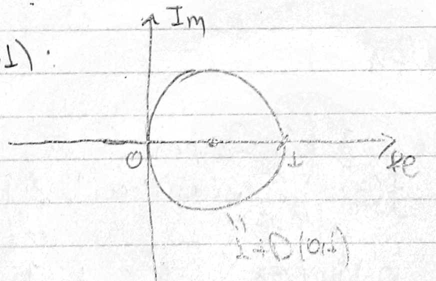
Από την άλλη, αφού το $D(1,1) \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$

η $\log(1+\cdot)$ είναι ολόμορφη στο $D(0,1)$

$[\log : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \longrightarrow \mathbb{C}$

είναι ολόμορφη με $(\log z)' = \frac{1}{z}]$

$D(1,1)$:



$$\Longrightarrow \frac{d}{dz} \log(1+z) = \frac{1}{1+z}, \quad z \in D(0,1)$$

$\Longrightarrow$ Η $f - \log(1+\cdot)$ είναι ολόμορφη με μηδενική παράγωγο στον τόπο $D(0,1)$ $\overset{\text{Πρόταση}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow$ η $f - \log(1+\cdot)$ είναι σταθερή στο $D(0,1)$

δηλ. $\underbrace{f(z)}_{=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n} - \mathrm{Log}(1+z) = \underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{\log 1}_{=0} = 0$

δηλ. $f(z) = \log(1+z), \quad z \in D(0,1)$ $\square$

(*) $\log z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

Ορισμός Μια $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, ονομάζεται αναλυτική αν για κάθε $a \in D$ $\exists$ $r(a) \in (0, +\infty]$ έτσι ώστε η f να αναπτύσσεται (ή αναλύεται) στο $D(a, r(a)) \subseteq D$ σε δυναμοσειρά (δηλ. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n(a)}_{\in \mathbb{C}} (z-a)^n$, $z \in D(a, r(a))$)

Θεώρημα f αναλυτική $\Leftrightarrow$ f ολόμορφη και f άπειρες φορές μιγ. διαφ. με $f^{(k)}$ αναλυτική και $f \in C^{\infty}(D)$
$\hookrightarrow D(a, r(a))$

<< Θεώρημα >> δυναμοσειρά (με ακτ. σύγκ. $R > 0$)
$\Rightarrow$ ολόμορφη.

Απόδειξη Έστω $a \in D$. Αφού f αναλυτική $\exists$ $r(a) > 0$ ε.ώ. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n$, $z \in D(a, r(a))$

$\xrightarrow{\text{<<Θεώρημα>>}}$ η f είναι ολόμορφη στο $D(a, r(a))$ και από το <<ΠΟΡΙΣΜΑ>> του <<Θεωρήματος>> προκύπτει ότι η σειρά αυτή είναι άπειρες φορές μιγ. διαφ. με

$$f^{k}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n(a)(z-a)^{n-k}$$

, $z \in D(a, r(a))$
και $f \in C^{\infty}(D(a, r(a)))$

Αφού, αυτές οι ιδιότητες, ισχύουν τοπικά, δηλ. σε μια ανοιχτή περιοχή του a για κάθε $a \in D$, η f είναι ολόμορφη στο D κ.τ.λ.

και οι $f^{(k)}: D \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτικές

Παράδειγμα

(1) $f(z) = z^n \;,\; z \in \mathbb{C} \;,\; n \in \mathbb{N}$

Έστω $a \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^n = (z - a + a)^n =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} (z-a)^k$$

διωνυμικός τύπος

$\Rightarrow$ κάθε πολυώνυμο $P(z)$ βαθμού $m \in \mathbb{N}_0$

$$\boxed{P(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \boxed{c_n \binom{n}{k} a^{n-k}} (z-a)^k$$

$$\left(= \sum_{k=0}^{m} \tilde{c}_k (z-a)^k \right)$$

θέτοντας $c_{n,k} := \begin{cases} c_n \binom{n}{k} a^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & n < k \end{cases}$, $n, k = 0, \dots, m$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} c_{n,k} (z-a)^k = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{m} c_{n,k} \right)}_{= \tilde{c}_k = \sum_{n=k}^{m} c_n \binom{n}{k} a^{n-k}} (z-a)^k$$

Κάθε πολ. βαθμού m είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ αφού $\forall a \in \mathbb{C}$ $P(z) = \sum_{n=0} c_n(a) (z-a)^n$ με

$$c_n(a) = \begin{cases} \tilde{c}_k, & k \leq m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

$(\Rightarrow R = +\infty)$

2) $\underset{\sim}{e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$

$= e^a e^{z-a} = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^a}{n!}}_{=c_n(a)} (z-a)^n, \quad z \in \mathbb{C}$

Μετά από απόδειξη μέσω τύπου του Euler

3) $\cos z \overset{\downarrow}{=} \cos a \cos(z-a) - \sin a \sin(z-a) \quad \forall z, a \in \mathbb{C}$

$= \cos a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^n}{(2n)!} - \sin a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\sim}{c_n(a)} (z-a)^n$

$= \begin{cases} (-1)^k \frac{\cos a}{(2k)!}, & n = 2k \\ (-1)^k \frac{\sin a}{(2k+1)!}, & m = 2k+1 \end{cases}$

• $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(a)(z-a)^n$

Για ποια $d_n(a)$????

4) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $f_m(z) = \frac{1}{(z_0 - z)^m}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Για $a \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n} = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{z_0-a}} = \frac{z_0 - a}{z_0 - z}$

για $z \in \mathbb{C}$ με $|z-a| < |z_0 - a|$

δηλ. για $z \in D(a, |z_0 - a|)$

$\Rightarrow f_1(z) = \frac{1}{z_0 - z} = \frac{1}{z_0 - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}}_{=c_n(a)} (z-a)^n$

$z \in D(a, |z_0 - a|)$

για την f_1

ΠΡΟΣΟΧΗ Η f_1 ορίζεται στο $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο $D(a,|z_0-a|)$

ΘΕΩΡΗΜΑ + ΠΟΡΙΣΜΑ $\Rightarrow$ $f_1\big|_{D(a,|z_0-a|)}$ είναι ολόμορφη, άπειρες φορές μιγ. διαφ. με

$$f_1^{(m)}(z)=m!\frac{1}{(z_0-z)^m}=(*)$$

$$(*)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}(z-a)^{n-m}\Rightarrow f_1^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}\frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}(z-a)^{n-m}$$

$m\in\mathbb{N}_0$

$z\in D(a,|z_0-a|)$

Κεφ. 5. «Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy»
(«ακρογωνιαίος λίθος» της μιγαδικής Ανάλυσης)

§1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ($\neq$ Επικαμπύλιο ολοκλ.)

Ορισμός Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη (δηλ. συνεχής απεικ.) Τότε, αν $\gamma=u+iv$, $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ (συνεχείς)

$$\int_a^b\gamma(t)\,dt:=\underbrace{\int_a^b u(t)\,dt}_{Re\,\delta(t)}+i\underbrace{\int_a^b v(t)\,dt}_{Im\,\delta(t)}\in\mathbb{C}$$

λέγεται ολοκλήρωμα της γ.

Ιδιότητες

1) $\int_a^b(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2)(t)\,dt=\lambda\int_a^b\gamma_1(t)\,dt+\mu\int_a^b\gamma_2(t)\,dt$

2) $\int_a^b\gamma(t)\,dt=\int_a^s\gamma(t)\,dt+\int_s^b\gamma(t)\,dt,\ s\in[a,b]$

(3) $\gamma(b)-\gamma(a)=\int_a^b \gamma'(t)\,dt$ αν γ C^1-καμπύλη (ΘΘΑΛ)

4) SOS $\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \leq \underbrace{\int_a^b |\gamma(t)|\,dt}_{\geq 0}$ (βλ. Λήμμα 3.7.2 ΓΤΔΑ)

[Απόδ. Έστω ότι $\int_a^b \gamma(t)\,dt=0$. Τότε ✓

Έστω $\int_a^b \gamma(t)\,dt \neq 0$. Θέτουμε $\lambda=\dfrac{\left|\int_a^b \gamma(t)dt\right|}{\int_a^b \gamma(t)dt}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda|=1$ και $\left|\int_a^b \gamma(t)dt\right| = \lambda\int_a^b \gamma(t)\,dt = Re\left(\lambda\int_a^b \gamma(t)dt\right) \overset{(1)}{=}$

$= Re\left(\int_a^b \lambda\gamma(t)dt\right) = \int_a^b Re(\lambda\gamma(t))\,dt \leq \int_a^b |\lambda\gamma(t)|\,d(t)$ (3)

$= \int_a^b |\gamma(t)|\,dt$] □.

<u>Παραδείγματα</u>

1) ευθ. τμήματα : $\gamma(t)=a+(b-a)t$, $t\in[0,1]$
από το a στο b, συμβολισμός : $[a,b]$

$\Rightarrow \int_0^1 \gamma(t)\,dt = \int_0^1 a+(b-a)t\,dt = a+\frac{1}{2}(b-a) =$

$=\frac{1}{2}(a+b)$

2) <u>Κύκλος</u>: $\gamma(t)=a+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

με κέντρο a, ακτίνα $r>0$

Δ.Ο. $\int_0^{2\pi} (\alpha + re^{it})\,dt = 2\pi\alpha$.

Άσκηση Δ.Ο. $\int_a^b e^{i\lambda t}\,dt = 0 \iff \lambda(b-a) = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

§2: (Μιγαδικό) επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

Ορισμός

Έστω $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ μια κατά τμήματα C^1-καμπύλη (βλ. ΓΓΔΑ) με $\gamma([a,b]) = K\subset\mathbb{C}$ και $f:K\to\mathbb{C}$ συνεχής. Τότε θα λέμε μιγ. επικ. ολοκλ. της f κατά μήκος της γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\gamma_i} f(z)\,dz}_{=\int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\,dt} \in \mathbb{C}$$

Ομαλή περίπτωση: $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ C^1

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b \underbrace{\underbrace{f(\gamma(t))}_{\in\mathbb{C}}\,\underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{C}}}_{t\mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t) = g(t)}\,dt \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$

Αν $f = u + iv$ και $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

Τότε
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{\big(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)}_{= u(\gamma(t))x'(t) - v(\gamma(t))y'(t) + iv(\gamma(t))x'(t) + iu(\gamma(t))y'(t)}\,dt$$

Ενώ με $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Προκύπτει ότι: $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u,-v)^T \cdot d(x,y) + i\int_\gamma (v,u)^T d(x,y)$

Ενώ το $\int_\gamma (u,v)^T d(x,y) \neq \int_\gamma f(z)dz$